# Лекция. Периодичность и антипериодичность. Постоянный ФО.

# *Условия периодичности и антипериодичности решений системы уравнений с периодическими коэффициентами. Системы с неизменяющимся фазовым объемом.*

Пусть среди мультипликаторов системы (19.1) с периодическими коэффициентами оказался мультипликатор p = 1, следовательно, в соответствии с равенством (19.26)

**z**(t+T) = **z**(t), (20.1)

то есть у системы есть по крайней мере одно периодическое решение с периодом T. И обратно, если у системы с периодическими коэффициентами есть хотя бы одно периодическое решение, то один из мультипликаторов равен единице.

Пусть теперь среди мультипликаторов системы (19.1) с периодическими коэффициентами оказался мультипликатор p = -1, следовательно, в соответствии с равенством (19.26)

**z**(t+T) = -**z**(t), (20.2)

то есть у системы, как говорят математики, есть по крайней мере одно антипериодическое решение с периодом T. И обратно, если у системы с периодическими коэффициентами есть хотя бы одно антипериодическое решение, то один из мультипликаторов равен минус единице.

Сушествование антипериодического решения периода T свидетельствует о том, что в системе с периодическими коэффициентами есть периодическое решение с периодом 2T.

Действительно,

**z**(t+2T) = -**z**(t+T) = **z**(t) (20.3)

Остановим наше внимание на системах уравнений с периодическими коэффициентами, для которых справедливо следующее условие, налагаемое на матрицу системы,

Tr **A**(t) = 0 (20.4)

Такого типа соотношение достаточно для того, чтобы фазовый объем системы со временем не менялся.

Поскольку в соответствии с (19.21) для фундаментальной матрицы решений системы справедливо соотношение , то фазовые объемы системы в моменты времени t и t+T связаны между собой через определитель матрицы монодромии **C**

 (20.5)

Так как в начальный момент времени , то , а поскольку фазовый объем системы со временем не меняется, то

det **C** = 1 (20.6)

## *Случай систем второго порядка. Поведение мультипликаторов. Критерии устойчивости, неустойчивости, сильной устойчивости. Существование Т-периодических и 2Т-периодических решений и граница области устойчивости системы с периодическими коэффициентами в пространстве параметров.*

Рассмотрим систему второго порядка с периодическими коэффициентами и нулевым следом матрицы **A**(t) (фазовый объем такой системы сохраняется)

 (20.7)

Матрица монодромии системы (20.7) имеет вид

, (20.8)

причем det **C** = 1, то есть

 (20.9)

Исследуем в данном случае поведение мультипликаторов. Характеристическое уравнение матрицы **С** имеет вид

**** (20.10)

Здесь .

По теореме Виетта

 (20.11)

Решая квадратное уравнение (20.10), имеем

 (20.12)

Выделим три случая.

1). 

В этом случае имеем два различных действительных корня . В силу соотношений (20.11) один из них () меньше единицы, другой () - больше, и геометрически они связаны между собой с помощью операции инверсии относительно единичной окружности на комплексной плоскости корней.

2). 

В этом случае имеем два комплексно сопряженных корня . В силу соотношений (20.11) они всегда лежат на единичной окружности , то есть

 (20.13)

3). 

В этом случае имеем два равных действительных корня

 или  (20.14)

Из результатов, изложенных в лекции 19, следует, что мультипликаторы  связаны с характеристическими показателями - корнями характеристического уравнения постоянной матрицы соответствующей приведенной системы уравнений

 (20.15)

По корням характеристического уравнения приведенной системы мы можем судить об устойчивости системы (20.7) по Ляпунову.

Если имеет место случай 1, то один из действительных корней () непременно больше единицы, . Следовательно, корень  и имеет место неустойчивость.

Если имеет место случай 2, то . Следовательно, корни  - чисто мнимые и имеет место устойчивость по Ляпунову.

Этот случай математики называют случаем сильной устойчивости. Дело в том, что если имеет место строгое неравенство , то для матриц монодромии , элементы которых достаточно мало отличаются от элементов матрицы **С**, тип неравенства для следа сохранится: , а значит устойчивым по Ляпунову является целый класс матриц с близкими значениями следа матрицы монодромии.

Если имеет место пограничный случай 3, то корни  оказываются кратными (20.14) и для решения вопроса об устойчивости по Ляпунову требуется дополнительный анализ.

Итак, при анализе траекторий корней приведенной системы на комплексной плоскости мультипликаторов возникает следующая картина смены поведения решений системы (20.7). Пусть сначала параметры системы таковы, что имеет место случай 1. Пусть, кроме того, оба мультипликатора положительны. При убывании модуля следа матрицы монодромии , мультипликаторы, оставаясь действительными и сближаясь, двигаются к точке пересечения действительной оси и единичной окружности. Система при этом остается неустойчивой. Когда модуль следа матрицы монодромии оказывается равным двум (случай 3), оба мультипликатора становятся равными единице. При этом в системе появляются периодические решения периода T. Когда модуль следа матрицы монодромии оказывается меньше двух (случай 2), мультипликаторы начинают, оставаясь на одной вертикали, двигаться вдоль единичной окружности, сначала удаляясь друг от друга (до тех пор пока модуль следа матрицы монодромии не обратится в нуль), а затем, приобретя отрицательные действительные части, при новом нарастании модуля следа матрицы монодромии сближаясь, устремляясь к другой точке пересечения действительной оси и единичной окружности. При этом система является устойчивой по Ляпунову. Таким образом, появление в системе периодического решения периода Т явилось событием, сопровождающим переход от неустойчивого к устойчивому по Ляпунову состоянию системы. Когда модуль следа матрицы монодромии вновь становится равным двум (случай 3), оба мультипликатора становятся равными минус единице. При этом в системе появляются периодические решения периода 2T. Когда модуль следа матрицы монодромии вновь становится больше двух, в системе опять появляется положительный характеристический показатель и она вновь оказывается неустойчивой по Ляпунову. Таким образом, появление в системе периодического решения периода 2T явилось событием, сопровождающим переход от устойчивого к неустойчивому по Ляпунову состоянию системы. Можно сказать, что область устойчивости системы по Ляпунову оказалась отгороженной (охваченной) периодическими решениями периодов T и 2T. Это обстоятельство подсказывает нам одну из заповедей теории устойчивости по Ляпунову для систем с периодическими коэффициентами. Важно уметь находить параметры системы, при которых она имеет периодические и антипериодические решения.

## *Уравнение Матье. Сведение задачи нахождения условий сильной устойчивости в задаче Матье с малой глубиной модуляции к построению матрицы монодромии в задаче о колебаниях математического маятника.*

Рассмотрим возникающее во многих задачах механики и теории управляемых систем уравнение Матье, описывающее колебательную систему с модуляционной накачкой

 (20.16)

Здесь в качестве независимой переменной t взято “безразмерное время”, единицей которого является период T модуляционной накачки,  представляет собой отношение собственной частоты p системы при отсутствии модуляции к частоте  модуляционной накачки, безразмерный параметр  называют глубиной модуляции.

Представляя это уравнение в виде системы уравнений второго порядка, имеем

 (20.17)

В данном случае матрица системы

 (20.18)

имеет нулевой след Tr **A**(t) = 0 и периодически меняющиеся элементы .

Поставим задачу нахождения условий сильной устойчивости системы уравнений (20.17). В соответствии с изложенной выше теорией для этого следует потребовать, чтобы для матрицы монодромии системы (20.17) было выполнено неравенство . Но, как аналитически найти матрицу монодромии **C** = **Z**(T) ?!

Для начала будем “искать под фонарем”, то есть не станем решать задачу нахождения условий сильной устойчивости системы (20.17) в полном объеме, а попытаемся так упростить задачу, чтобы можно было добиться решения известными нам способами. Предположим, что параметр  в уравнении Матье достаточно мал. Этот параметр характеризует отличие уравнения Матье от уравнения колебаний математического маятника и носит название “глубина модуляции”. Итак, предположим, что глубина модуляции мала и отличие уравнения Матье от уравнения колебаний маятника в некотором смысле незначительно.

В этом случае следы матриц монодромии для системы, описывающей колебания маятника,

 (20.19)

и системы (20.17) будут отличаться мало (на величины порядка ).

Это утверждение базируется на знаменитой теореме А.Пуанкаре о существовании и единственности на конечном интервале времени решения задачи Коши с аналитической правой частью

 (20.20)

в виде ряда по степеням достаточно малого параметра 

, (20.21)

где вектор-функции  непрерывно дифференцируемы.